# Plan dalszego rozwoju naukowego

dr Rafał Zalas*
E-mail: zalasrafal@gmail.com

Tematyka moich badań związana jest z problemami dopuszczalności wypukłej oraz z zagadnieniami optymalizacyjnymi zadanymi najczęściej w przestrzeni Hilberta. W ramach prowadzonych badań zamierzam skupić się na analizie zbieżności różnego rodzaju metod iteracyjnych, w tym metod rzutowych. Metody rzutowe w swojej najprostszej postaci generują ciąg aproksymacji opierając się na rzutach metrycznych na poszczególne zbiory ograniczeń. Tak wygenerowany ciąg ma w założeniu zbiegać do rozwiązania rozpatrywanego problemu. W przypadku bardziej zaawansowanych metod iteracyjnych, zamiast rzutów metrycznych rozpatrywane są ogólniejsze operatory nieoddalające, a nawet quasi-nieoddalające.

Istotą prowadzonych badań jest określenie warunków wystarczających przy których można podać rodzaj zbieżności (słaba/mocna) rozpatrywanej metody iteracyjnej, a w przypadku mocnej zbieżności, określenie złożoności obliczeniowej.

Jednym z pierwszych projektów, którym planuję się zająć jest studiowanie liniowej zbieżności metody iteracyjnej opartej na naprzemiennym stosowaniu dwóch operatorów separujących. Algorytm ten ma swoje korzenie w metodzie rzutowania naprzemiennego. We wcześniejszych pracach z prof. Andrzejem Cegielskim oraz prof. Simeonem Reichem [2] sformułowaliśmy warunki wystarczające na słabą, mocną oraz liniową zbieżność wyżej wymienionej metody przy założeniu, że współczynniki relaksacyjne wpływające na operatory separujące są mniejsze niż dwa. W przypadku rzutów metrycznych oznacza to, że najdłuższy z dopuszczalnych kroków nie przekracza odbicia. W ramach rozpatrywanego projektu planuję rozszerzyć zbiór dopuszczalnych parametrów relaksacyjnych tak aby umożliwić wartości parametrów relaksacyjnych powyżej dwóch (dalej niż odbicie). Rozszerzenie zakresu parametrów relaksacyjnych ma pozytywny wpływ na rozpatrywane metody. Projekt ten jest już na dosyć zaawansowanym etapie, gdzie istotnym pojęciem jest tzw. *liniowa regularność* operatorów. Warto tu podkreślić, że pojęcie liniowej regularności wcale nie oznacza, że rozpatrywane operatory są liniowe. Wręcz przeciwnie, mogą być one mocno nieliniowe.

Naturalną kontynuacją pierwszego projektu jest zastąpienie wyżej wymienionej liniowej regularności przez tzw. *regularność w sensie Höldera*. Warunek ten jako mniej restrykcyjny można dużo łatwiej zagwarantować. Z drugiej strony, przy takim założeniu można oczekiwać, że zbieżność metod iteracyjnych jest co najwyżej subliniowa, jak pokazano w pracy [1].

Powyższe dwa projekty mogą być także rozpatrywane w kontekście problemów dopuszczalności rozdzielonej, gdzie przynajmniej jedno z ograniczeń znajduje się w innej, niż podstawowa, przestrzeni Hilberta. Jedną z klasycznych metod dla problemu dopuszczalności rozdzielonej jest tzw. "metoda $CQ$" wprowadzona przez C. Byrna. Jej systematyczne uogólnienie można opisać przy użyciu *transformaty Landwebera*, którą wraz z współautorami wprowadziliśmy w pracy [3]. Analiza tej metody ograniczała się jednak do pomniejszonego zakresu parametrów relaksacyjnych. W kolejnym projekcie, podobnie

*Wyrażam zgodę na przetwarzanie danych osobowych zawartych w mojej ofercie pracy dla potrzeb niezbędnych do realizacji procesu rekrutacji, prowadzonych przez Uniwersytet Zielonogórski z siedzibą w Zielonej Górze (65-417), przy ulicy Licealnej 9. Jednocześnie wyrażam zgodę na przetwarzanie przez ogłoszeniodawcę moich danych osobowych na potrzeby przyszłych rekrutacji.

jak w pierwszych dwóch, planuję rozszerzyć zakres parametrów relaksacyjnych dla metod iteracyjnych otrzymanych przy użyciu transformaty Landwebera.

Liniowa regularność jak i regularność w sensie Höldera są przykładami narzędzi do studiowania metod nieliniowych. Jednakże, przy analizie teoretycznej, dosyć często rozpatrywane są zbiory ograniczeń, które są domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni Hilberta. W konsekwencji, generowane ciągi aproksymacji można powiązać z pewnym operatorem liniowym. Warto w takim przypadku przeprowadzić analizę spektrum otrzymanego operatora. W jednym z ostatnio zakończonych projektów [4] udało mi się porównać metodę rzutowania naprzemiennego z metodą rzutowania równoczesnego. Wynik ten został uzyskany w przestrzeniach skończenie wymiarowych właśnie poprzez porównanie zbiorów spektralnych dwóch operatorów liniowych. Jednym z kolejnych projektów, który planuję zrealizować, jest rozszerzenie powyższego rezultatu do przestrzeni nieskończenie wymiarowej.

Metoda rzutowania naprzemiennego, jak i metoda rzutowania równoczesnego są klasycznymi przykładami metod rzutowych. Kolejnym klasycznym przykładem jest metoda Douglasa-Rachforda (DR). Wyniki z pracy [4] sugerują, że podobną analizę spektralną można przeprowadzić także dla metody DR. Wymaga to odpowiedniego dopasowania operatora liniowego. Celem kolejnego projektu jest porównanie metody DR z wyżej wymienionymi metodami rzutowymi w przypadku dwóch podprzestrzeni liniowych. W pierwszym etapie, przy założeniu skończonego wymiaru, następnie, już bez takiego założenia.

W powyżej opisanych projektach mamy do czynienia z problemami dopuszczalności wypukłej z dwoma zbiorami ograniczeń. W przypadku gdy zbiorów ograniczeń jest więcej niż dwa, pojawia się problem wyboru ciągu sterującego metodą iteracyjną. Taki ciąg wyznacza które operatory (np. rzuty metryczne) należy użyć przy konstrukcji kolejnego elementu z ciągu aproksymacji. Przy metodach sekwencyjnych jest to zazwyczaj wybór o charakterze deterministycznym. W kolejnych projekcie chciałbym zająć się analizą zbieżności metod rzutowych przy założeniu że ciąg sterujący metodą iteracyjną jest zadany w sposób losowy.

# Literatura


[1] J. M. Borwein, G. Li, M. K. Tam, Convergence rate analysis for averaged fixed point iterations in common fixed point problems, *SIAM J. Optim.* **27** (2017), 1–33.

[2] A. Cegielski, S. Reich, R. Zalas, Regular sequences of quasi-nonexpansive operators and their applications, *SIAM J. Optim.* **28** (2018), 1508–1532.

[3] A. Cegielski, S. Reich, R. Zalas, Weak, Strong and linear convergence of the CQ-method via the regularity of Landweber operators, *Optimization* **69** (2020), 605–636.

[4] S. Reich, R. Zalas, Comparing the methods of alternating and simultaneous projections for two subspaces, *Linear Algebra Appl.* **683** (2024), 235–263.